グリーン関数法による一次元 Ising 模型

小　口　武　彦
小　野　昱　郎
（東京都立大・物理）

（8月18日　受理）

多体問題にグリーン関数法を適用するときは、多体のグリーン関数を切断する近似を用いなければならないことが常識になつている。ここではそのような切断を用いずに厳密解が得られるという一つの特殊な例を示そう。それは最隣接スピンが相互作用をしている一次元 Ising 模型である。ハミルトニアンは

$$H = -\frac{J}{2}\sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - \frac{1}{2} mH \sum_i \sigma_i^z \tag{1}$$

σ_i^z は i 番目の格子点にあるパウリのスピン演算子の z 成分で、±1の値をとることができる。(1)の中の他の記号は自明である。原点0のスピンに注目して

$$G_0(t) \equiv \langle\langle \sigma_0^+(t)\,;\ \sigma_0^- \rangle\rangle \tag{2}$$

なるグリーン関数を定義する。但し $\sigma^{\pm} = \sigma^x \pm i\,\sigma^y$。$G_0$ の運動方程式を作ると、σ_0^+ とHの交換子の中で消えないものは、Hの中の σ_0^z を含んだ項のみであるから

$$i\frac{dG_0}{dt} = 4\langle\sigma^z\rangle\,\delta(t) + J\langle\langle \sigma_0^+(\sigma_1^z+\sigma_{-1}^z)(t)\,;\ \sigma_0^- \rangle\rangle + mH\langle\langle \sigma_0^+\,;\ \sigma_0^- \rangle\rangle \tag{3}$$

となる。ここに $\sigma_{\pm1}^z$ は原点の両隣りのスピン演算子であり、(3)を導くのに $[\sigma_i^+,\sigma_j^z] = -2\sigma_i^+\delta_{ij}$ なる関係を用いた。(3)式の右辺の第2項は新しいグリーン関数であつて、

$$G_1(t) \equiv \langle\langle \sigma_0^+(\sigma_{-1}^z + \sigma_1^z)(t)\,;\ \sigma_0^- \rangle\rangle \tag{4}$$

と定義すると、(3)は

$$i\frac{dG_0}{dt} = 4\langle\sigma^z\rangle\,\delta(t) + J\,G_1 + mH\,G_0 \tag{5}$$

となる。$G_1(t)$の運動方程式を作るとき、更に新しいグリーン関数

$$G_2(t) \equiv \ll \sigma_0^+ \sigma_{-1}^Z \sigma_1^Z(t) \ ; \ \sigma_0^- \gg \tag{6}$$

を定義することにより、

$$i\frac{dG_1}{dt} = 4\langle\sigma_0^Z(\sigma_{-1}^Z + \sigma_1^Z)\rangle \delta(t) + 2JG_0 + 2JG_2 + mHG_1 \tag{7}$$

とかくことができる。G_2についても運動方程式を作ると、もはや新しいグリーン関数は現われずに

$$i\frac{dG_2}{dt} = 4\langle\sigma_{-1}^Z\sigma_0^Z\sigma_1^Z\rangle \delta(t) + JG_1 + mHG_2 \tag{8}$$

となる。このように有限個のグリーン関数で閉ちることは、全くIsingハミルトニアンの特殊性による。$G_i(t)$をフーリエ変換し、

$$G_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_i(E)\ e^{-iEt}dt \tag{9}$$

更に

$$E' = E - mH \tag{10}$$

とおくと、(5)，(7)，(8)は夫々

$$E' G_0(E') - JG_1(E') = \frac{2}{\pi}x_1 \tag{11a}$$

$$-2JG_0(E') + E'G_1(E') - 2JG_2(E') = \frac{4}{\pi}x_2 \tag{11b}$$

$$-JG_1(E') + E'G_2(E') = \frac{2}{\pi}x_3 \tag{11c}$$

となる。但し

$$\langle\sigma^Z\rangle = x_1 \ , \ \langle\sigma_0^Z(\sigma_{-1}^Z + \sigma_1^Z)\rangle = 2x_2 \ , \ \langle\sigma_{-1}^Z\sigma_0^Z\sigma_1^Z\rangle = x_3 \ . \tag{12}$$

(11)からグリーン関数は次のように解かれる

$$G_0(E') = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{x_1 - x_3}{E'} + \frac{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3}{E' - 2J} + \frac{\frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3}{E' + 2J}\right\} \tag{13a}$$

$$G_1(E') = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{x_1+2x_2+x_3}{E'-2J} + \frac{-x_1+2x_2-x_3}{E'+2J}\right\} \tag{13b}$$

$$G_2(E') = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{-x_1+x_3}{E'} + \frac{\frac{1}{2}x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3}{E'-2J} + \frac{\frac{1}{2}x_1-x_2+\frac{1}{2}x_3}{E'-2J}\right. \tag{13c}$$

グリーン関数が求まつたから、スペクトル定理を用いて（$\beta \equiv 1/kT$）

$$<\sigma_0^{-}\sigma_0^{+}> = \frac{2(x_1-x_3)}{e^{\beta mH}-1} + \frac{x_1+2x_2+x_3}{e^{\beta(2J+mH)}-1} + \frac{x_1-2x_2+x_3}{e^{\beta(-2J+mH)}-1} \tag{14a}$$

$$<\sigma_0^{-}\sigma_0^{+}(\sigma_{-1}^{z}+\sigma_1^{z})> = \frac{2(x_1+2x_2+x_3)}{e^{\beta(2J+mH)}-1} + \frac{2(-x_1+2x_2-x_3)}{e^{\beta(-2J+mH)}-1} \tag{14b}$$

$$<\sigma_0^{-}\sigma_0^{+}\sigma_{-1}^{z}\sigma_1^{z}> = \frac{2(-x_1+x_3)}{e^{\beta mH}-1} + \frac{x_1+2x_2+x_3}{e^{\beta(2J+mH)}-1} + \frac{x_1-2x_2+x_3}{e^{\beta(-2J+mH)}-1} \tag{14c}$$

(14) でわかるように、ハミルトニアンにHをいれておかないと発散の困難を生ずる。 (14) をHで展開し、H^2 以上の項を省略すると

$$x_1 - x_3 = \beta mH(1 - \coth\beta J,\, x_2) \tag{15a}$$

$$(-2+\coth\beta J)x_1 + \coth\beta J,\, x_3 = \frac{\beta mH}{\sinh^2\beta J}x_2 \tag{15b}$$

$$x_1 - x_3 = \beta mH(-x_2' + \coth\beta J,\, x_2) \tag{15c}$$

但し

$$x_2' = <\sigma_{-1}^{z}\,\sigma_1^{z}> \tag{16}$$

(15) は3個の式に対し、x_1, x_2, x_3, x_2' と4個の変数があるから完全には解けない。然しH＝0のとき、(15a, b) より

$$x_1 = x_3 = 0 \tag{17}$$

これは一次元の Ising 模型は強磁性にならないことを示している。

以上で Ising 模型の特殊性を用いたが、次に一次元格子の特殊性を用いて問題を完全に解くことを試みる。原点からn番目の格子点のスピンをσ_nとし、

次の３個のグリーン関数

$$G_{0,n} \equiv \langle\langle \sigma_0^+ \sigma_n^z(t) \; ; \; \sigma_0^- \rangle\rangle \tag{18a}$$

$$G_{1,n} \equiv \langle\langle \sigma_0^+ (\sigma_{-1}^z + \sigma_1^z) \sigma_n^z(t) \; ; \; \sigma_0^- \rangle\rangle \tag{18b}$$

$$G_{2,n} \equiv \langle\langle \sigma_0^+ \sigma_{-1}^z \sigma_1^z \sigma_n^z(t) \; ; \; \sigma_0^- \rangle\rangle \tag{18c}$$

を定義し、これらの運動方程式を作る。前と同様に $G_{i,n}(i=0,1,2)$ を解きスペクトル定理を用いて、(15a，b，c) に相当する式を求めると

$$x_{1,n} - x_{3,n} = \beta m H \{ \langle \sigma^z \rangle - x_{2,n} \coth \beta J \} \tag{19a}$$

$$\langle \sigma_1^z \sigma_n^z \rangle + \langle \sigma_{-1}^z \sigma_n^z \rangle = (x_{1,n} + x_{3,n}) \coth \beta J - x_{2,n} \frac{\beta m H}{\sinh^2 \beta J} \tag{19b}$$

$$x_{3,n} - x_{1,n} = \beta m H \{ \langle \sigma_{-1}^z \sigma_1^z \sigma_n^z \rangle - x_{2,n} \coth \beta J \tag{19c}$$

但し

$$x_{1,n} = \langle \sigma_0^z \sigma_n^z \rangle, \quad 2x_{2,n} = \langle \sigma_0^z (\sigma_{-1}^z + \sigma_1^z) \sigma_n^z \rangle,$$
$$x_{3,n} = \langle \sigma_{-1}^z \sigma_0^z \sigma_1^z \sigma_n^z \rangle \tag{20}$$

$H=0$ では、(19a) 又は (19c) より $x_{1,n} = x_{3,n}$ であるから、(19b) より

$$\langle \sigma_{-1}^z \sigma_n^z \rangle + \langle \sigma_1^z \sigma_n^z \rangle = 2 \langle \sigma_0^z \sigma_n^z \rangle \coth \beta J \tag{21}$$

が成立する。これは任意の n について成立する式であるから

$$\langle \sigma_0^z \sigma_n^z \rangle = \sum_q e^{iqn} f(q) \tag{22}$$

とおいて(21)に代入すると、$f(q)=0 \; (q \neq q_0)$ となり、$q=q_0$ で

$$e^{iq_0} = \begin{cases} \tanh \dfrac{\beta J}{2} & \text{(23a)} \\ 1/(\tanh \dfrac{\beta J}{2}) & \text{(23b)} \end{cases}$$

となるが、$\langle \sigma_0^z \sigma_n^z \rangle$ は n と共に単調に減少すべきであるから、(23a) より

$$\langle \sigma_0^z \sigma_n^z \rangle = (\tanh \frac{\beta J}{2})^n \tag{24}$$

が解である。これにより

$$x_2 = \langle \sigma_0^Z \sigma_1^Z \rangle = \tanh \frac{\beta J}{2} \tag{25}$$

であるから、(15a,b) より

$$x_1 = \frac{1}{2} \beta m H e^{\beta J} \tag{26}$$

これから帯磁率が求まる。

以上で一次元の Ising 模型は完全に求まつた。この方法を二次元及び三次元の Ising 模型に適用すると、一般に (z+1) 個 (zは最隣接格子点の数) のグリーン関数を必要とし、(15) に相当する (z+1) 個の独立な式が求まるが、変数である独立な相関関数の数は、一般に 2z 個となるので、それらを完全に解くことはできない。この場合は、一次元のときの (18) に相当するグリーン関数を用いても、一次元のときのような都合のよい関係式は得られないので、相関関数の切断の近似を導入しなければならない。これらについては改めて述べるつもりである。

Ising 模型にグリーン関数の方法を適用することは、Doman と ter Haar[1] 及び Callen[2] が既に試みているが、彼等は途中で近似を挿入したために Weiss 近似以外の具体的な結果を得ていない。

この研究の初期の段階で、有益な議論をしていただいた教育大学の高野文彦氏に厚く御礼申し上げます。

文　献

1) B.G.S. Doman and D. ter Haar, Phys. Letters 2 (1962) 15.

2) H.B. Callen, Phys.Letters. 4 (1963) 161.